

Transmisión Digital

Tema 5. Detección con interferencia entre símbolos

GTI-SSR-ETSIT-UPM

José Ignacio Ronda Prieto, jir@gti.ssr.upm.es, www.gti.ssr.upm.es/~jir

23 de noviembre de 2015



Contents

- 1 Introducción
- 2 Detección óptima de la secuencia
- 3 Sistemas basados filtrado lineal
- 4 Implementación con filtros estables
- 5 Sistemas con realimentación
- 6 Igualadores lineales adaptativos

Preámbulo

Copyright

Transmisión Digital: Detección con interferencia entre símbolos

Copyright (C) 2015 Algunos derechos reservados. José Ignacio Ronda Prieto <jir@gti.ssr.upm.es>

Versión 1.0, noviembre de 2015.

Licencia de distribución

Este trabajo se distribuye bajo una licencia *Creative Commons* Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 3.0 España (CC-BY-SA-NC).

Para ver una copia de esta licencia, visite la página de la licencia

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es>

o envíe una carta a Creative commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, EEUU.

Estos apuntes se hacen públicos con la intención de que sean útiles. Aunque se ha tenido cuidado durante su preparación no puede descartarse que aún contengan errores. El autor no garantiza que el contenido de estos apuntes esté libre de errores.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Spain License. To view a copy of this licence, visit

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es>

or send a letter to Creative commons, 171 Second Street, Suite 300, San Francisco, California, 94105, USA.

These notes are provided in the hope they are useful. While caution has been taken during its preparation, it is possible that notes still contain some errors. There is absolutely no warranty about its contents.

Resumen de la licencia:

Está permitido

Copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra.

Hacer obras derivadas.

Bajo las siguientes condiciones:

Reconocimiento: Se deben reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciador.

No comercial: No se puede utilizar esta obra para fines comerciales.

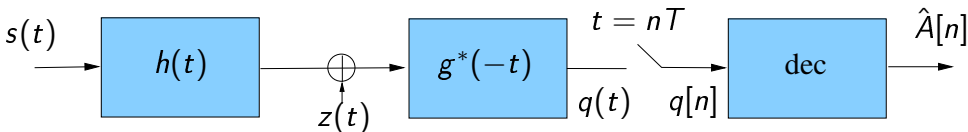
Compartir bajo la misma licencia: Si se altera o se transforma esta obra, o se genera una obra derivada, sólo se puede distribuir la obra generada bajo una licencia similar a ésta.

Introducción

Consideramos el modelo paso bajo equivalente de un sistema unidimensional en el que

- el transmisor genera la señal $s(t) = \sum_n A[n]g(t - nT)$
- la señal pasa por un canal con respuesta al impulso $h(t)$ y ruido aditivo gaussiano blanco complejo $z(t)$
- el receptor utiliza un filtro con respuesta al impulso $g^*(-t)$

Suponemos que $g(t)$ satisface la condición de no IES, es decir, $r_g(nT) = \delta[n]$, donde $r_g(\tau) = g(\tau) * g^*(-\tau)$.

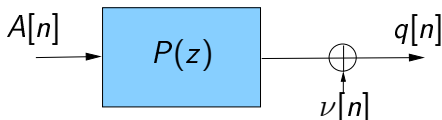


Introducción

El sistema entre la generación de $A[n]$ y la obtención de $q[n]$ es equivalente al sistema discreto siguiente.

Definiendo $p(t) = g(t) * h(t) * g^*(-t)$, $p[n] = p(nT)$,

$$\begin{aligned}\sum_n A[n] g(t - nT) * h(t) * g^*(-t) \big|_{t=kT} &= \sum_n A[n] p(t - nT) \big|_{kT} \\ &= \sum_n A[n] p(kT - nT) = \sum_n A[n] p[k - n]\end{aligned}$$



Para caracterizar el ruido $\nu[n]$ tenemos que hacer un inciso sobre filtrado de procesos.

Inciso: Filtrado de procesos estacionarios de tiempo continuo

Recordamos que si

- $X(t)$ es un **PE estacionario en sentido amplio de tiempo continuo** con función de autocorrelación $R_X(\tau)$
- $h(t)$ es la respuesta al impulso de un filtro estable,

entonces el proceso $Y(t) = X(t) * h(t)$ es también un proceso estacionario en sentido amplio con **autocorrelación**

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

Por tanto su **densidad espectral de potencia**, que es la TF de la autocorrelación, vale

$$S_Y(\omega) = S_X(\omega)H(\omega)H^*(\omega)$$

Introducción

Por tanto, el proceso $n(t) = z(t) * g^*(-t)$ tiene autocorrelación

$$R_\nu(\tau) = R_z(\tau) * g(\tau) * g^*(-\tau) = N_0 r_g(\tau)$$

y su versión muestreada $\nu[k] = n(kT)$ tiene autocorrelación

$$\begin{aligned} R_\nu[k] &= E[\nu[m+k]\nu^*[m]] = E[n(mT+kT)n^*(mT)] \\ &= R_\nu(kT) = N_0 r_g(kT) = N_0 \delta[k] \end{aligned}$$

Por tanto es un proceso de ruido blanco discreto en el que las partes real e imaginaria de las muestras son gaussianas independientes de varianza $\sigma_\nu^2 = N_0$.

Introducción

Si $p[n]$ no es proporcional a $\delta[n]$ tenemos **interferencia entre símbolos (IES)**.

En este tema estudiaremos las siguientes formas de combatir este fenómeno:

- Solución óptima mediante el algoritmo de Viterbi (sistemas FIR)
(*Maximum Likelihood Sequence Detection (MLSD)*)
- Sistemas basados en filtro lineal:
 - ▶ cancelador de IES (*Zero Forcing (ZF) equalizer*)
 - ▶ minimizador de IES + ruido (*Minimum Mean Square Error (MMSE) equalizer*)
- Sistemas con realimentación de decisión (*Decision-Feedback Equalization*) (*esquemas ZF, MMSE*)
- Sistemas adaptativos (algoritmo *Least Mean Square (LMS)*)

Detección óptima de la secuencia

Suponemos canal causal de respuesta al impulso finita $p[k]$, $p[k] = 0$ fuera de $k = 0, \dots, K$.

Si se detecta la secuencia $q[k] = A[k] * p[k] + \nu[k]$, $k = 0, \dots, L - 1$, dado que

- las posibles secuencias $A[k]$ son equiprobables
- las muestras de ruido son gaussianas independientes de media nula con la misma varianza

la secuencia $A[k]$ más probable corresponde al **criterio de mínima distancia**, es decir, la que minimiza

$$\|q[k] - A[k] * p[k]\|^2 = \sum_{n=0}^{L-1} \left| q[n] - \sum_{k=0}^K p[k] A[n-k] \right|^2$$

Detección óptima de la secuencia

El problema es equivalente a la **detección de señales de una modulación con memoria**.

La secuencia óptima se puede hallar mediante el algoritmo de Viterbi, en un grafo en el que el **espacio de estados** es el conjunto de tuplas

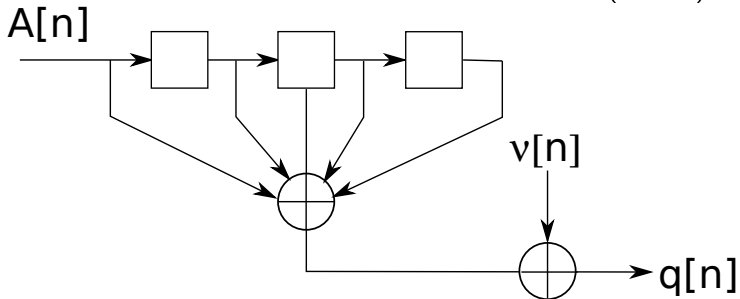
$$(A[n - 1], A[n - 2], \dots, A[n - K])$$

como en **codificación convolucional** o **codificación en rejilla**, pero ahora el contenido del registro de desplazamiento que define el estado son **amplitudes** pasadas.

Por tanto tenemos M^K estados donde M es el conjunto de valores de las amplitudes $A[n]$.

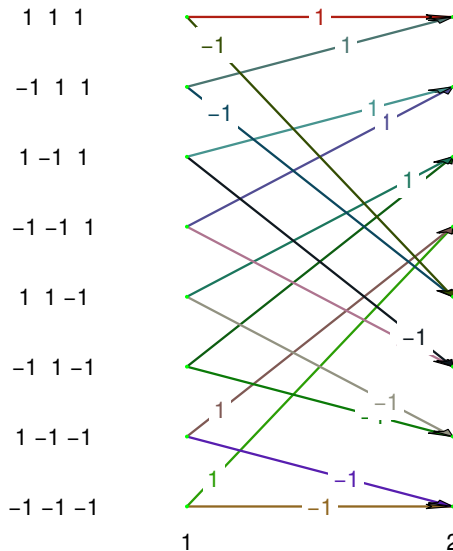
Ejemplo

Ejemplo: Modelo de sistema hasta la entrada del decisor ($K = 3$).



Ejemplo

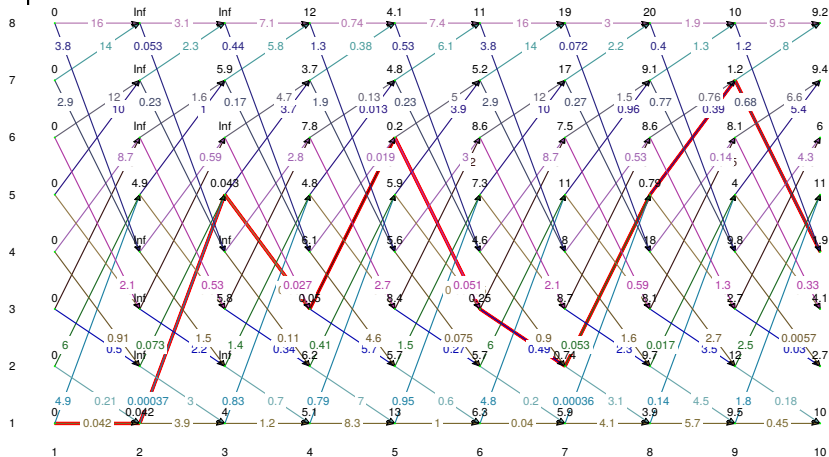
Ejemplo $M = 2$, $K = 3$. Diagrama en rejilla.



Ejemplo

Ejemplo $M = 2$, $K = 3$, $p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2] + \frac{1}{8}\delta[n-3]$.

Ejemplo de decodificación



Distancia mínima entre secuencias

- La probabilidad de error, como en las modulaciones con memoria, está acotada por la distancia mínima entre secuencias.
- Esta distancia, al cuadrado, es la menor energía de las de las **secuencias diferencia de secuencias** no nulas.
- En otros casos similares que hemos estudiado, como en codificación convolucional, el conjunto de las secuencias diferencia de secuencias coincidía con el conjunto de secuencias.
- En nuestro caso son las secuencias generadas por **amplitudes diferencia de amplitudes**. P. ej., para $M = 2$,
 - ▶ Amplitudes: $+1$ y -1 ,
 - ▶ Diferencias de amplitud: -2 , 0 , $+2$.

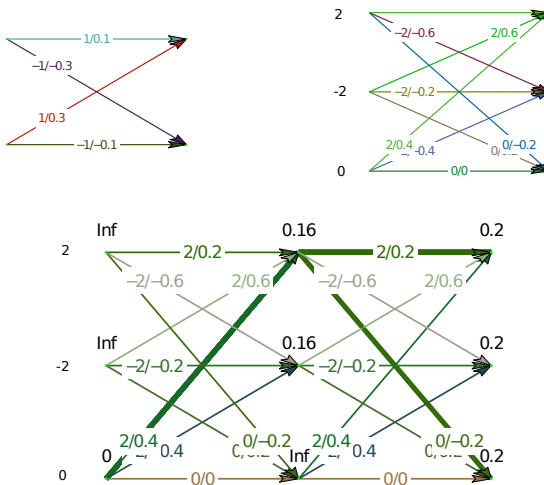
Distancia mínima entre secuencias

Ejemplo (página siguiente): $M = 2$, $K = 1$, $p[n] = 0,2\delta[n] + 0,1\delta[n - 1]$:
diagrama en rejilla del sistema, diagrama en rejilla del sistema auxiliar,
algoritmo de Viterbi sobre el diagrama auxiliar con costes iguales a las
amplitudes al cuadrado de los símbolos de salida.

En este ejemplo el coste mínimo es $0,4^2 + (-0,2)^2 = 0,16 + 0,04 = 0,20$,
correspondientes a las amplitudes diferencia

$$D[1] = A_1[1] - A_2[1] = 2, \quad D[2] = A_1[2] - A_2[2] = 0.$$

Distancia mínima entre secuencias



Sistemas basados filtrado lineal

Antes de abordar la reducción de la IES mediante filtrado lineal recordamos las relaciones de filtrado de procesos estacionarios que vamos a utilizar.

Inciso: Filtrado de procesos estacionarios discretos

Si tenemos que

- $X[n]$ es un **PE de tiempo discreto estacionario en sentido amplio y de media nula** con función de autocorrelación $R_X[m]$,
- $h[n]$ es la respuesta al impulso de un filtro estable,

entonces el proceso $Y[n] = X[n] * h[n]$ es también un proceso estacionario en sentido amplio con **autocorrelación**

$$R_Y[m] = R_X[m] * h[m] * h^*[-m]$$

Por tanto su **densidad espectral de potencia**, que es la TF de la autocorrelación, vale

$$S_Y(\omega) = S_X(\omega)H(\omega)H^*(\omega)$$

Si en vez de la TF utilizamos la transformada Z tenemos

$$S_Y(z) = S_X(z)H(z)H^*(1/z^*)$$

(Ejercicio: demostrar que $\mathcal{Z}[h^*[-m]] = H^*(1/z^*)$)

Inciso: Filtrado de procesos estacionarios discretos

La correlación cruzada de la entrada y la salida vale

$$R_{YX}[m] = E[Y[n+m]X^*[n]] = R_X[m] * h[m]$$

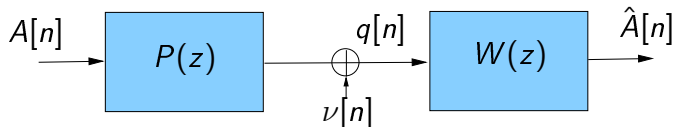
Otra relación que utilizaremos es que si $W(t) = U(t) + V(t)$, con $U(t)$ y $V(t)$ independientes,

$$R_W(\tau) = R_U(\tau) + R_V(\tau)$$

Reducción de la IES mediante filtrado lineal

Incluimos un filtro en el receptor para reducir la IES. Consideramos dos posibilidades:

- Cancelación total de la IES, aunque amplifica el ruido (*Zero Forcing linear equalizer (LE-ZF)*)
- Minimización de la distorsión total (ruido más IES) (*Minimum mean square error linear equalizer (LE-MMSE)*)



Cancelación de la IES

(Zero Forcing linear equalizer (**LE-ZF**))

- Consiste en el filtro inverso de $P(z)$, $W(z) = P^{-1}(z)$.
- Si la implementación es ideal, cancela la IES.
- El problema es que amplifica el ruido, que pasa a ser un proceso $e[n] = \nu[n] * w[n]$ con autocorrelación

$$R_e(z) = \sigma_\nu^2 W(z) W^*(1/z^*) = \frac{\sigma_\nu^2}{P(z) P^*(1/z^*)}$$

Cancelación de la IES

En particular cada muestra tiene varianza

$$\begin{aligned}\epsilon_{LE-ZF} &= E \left[|e[n]|^2 \right] = R_e[0] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_e(e^{j\omega}) d\omega = \frac{\sigma_v^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|P(e^{j\omega})|^2} d\omega\end{aligned}$$

Minimización de la distorsión total

(Minimum mean square error linear equalizar (LE-MMSE))

- En este esquema se minimiza la energía de la distorsión total (IES más ruido).
- Para ello se modela la señal de información $A[n]$ como un proceso estocástico estacionario de muestras independientes de media nula y varianza σ_A^2 .
- Queremos hallar el filtro $w[n]$ que minimiza

$$E \left[|A[n] - w[n] * q[n]|^2 \right]$$

recordando que $q[n] = A[n] * p[n] + \nu[n]$

Inciso: estimación óptima de un proceso filtrado

- El proceso $A[n]$ no lo observamos directamente, sino a través de su versión filtrada con ruido $q[n] = A[n] * p[n] + \nu[n]$.
- Queremos hallar $w[n]$ tal que si $\hat{A}[n] = w[n] * q[n]$, se haga mínima la varianza del error, $E[|e[n]|^2]$, $e[n] = \hat{A}[n] - A[n]$.
- Tenemos

$$\begin{aligned} e[n] &= \hat{A}[n] - A[n] = w[n] * (p[n] * A[n] + \nu[n]) - A[n] \\ &= (w[n] * p[n] - \delta[n]) * x[n] + w[n] * \nu[n] \end{aligned}$$

y las DEP

$$\begin{aligned} S_q(\omega) &= S_A(\omega) |P(\omega)|^2 + S_\nu(\omega) \\ S_e(\omega) &= S_A(\omega) |W(\omega)P(\omega) - 1|^2 + S_\nu(\omega) |W(\omega)|^2 \\ &= (S_A |P|^2 + S_\nu) |W|^2 - 2\Re(S_A P W) + S_A \end{aligned}$$

Estimación óptima de un proceso filtrado

Vamos a hallar para cada ω un valor $W(\omega)$ que minimiza $S_e(\omega)$.

Para ello consideramos el problema elemental de minimizar la función real de variable compleja

$$F(z) = a^2|z|^2 - 2\Re(b^*z) + c$$

Desarrollando e identificando coeficientes tenemos que

$$F(z) = \|az - p\|^2 + q$$

con

$$p = \frac{b}{a}, \quad q = c - \frac{|b|^2}{a^2}$$

Luego

$$z_{opt} = \frac{p}{a} = \frac{b}{a^2}, \quad F_{min} = c - \frac{|b|^2}{a^2}$$

Estimación óptima de un proceso filtrado

En nuestro caso queremos minimizar

$$S_e = \underbrace{(S_A |P|^2 + S_\nu)}_{a^2} |W|^2 - 2\Re \left(\underbrace{S_A P}_{b^*} W \right) + \underbrace{S_A}_c$$

luego

$$W_{opt} = \frac{b}{a^2} = \frac{S_A(\omega) P^*(\omega)}{S_A(\omega) |P(\omega)|^2 + S_\nu(\omega)} = \frac{P^*(\omega)}{|P(\omega)|^2 + \frac{S_\nu(\omega)}{S_A(\omega)}} = \frac{P^*(\omega)}{|P(\omega)|^2 + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_A^2}}$$

que da lugar a

$$S_{emin} = c - \frac{|b|^2}{a^2} = S_A - \frac{|S_A P^*|^2}{S_A |P|^2 + S_\nu} = \frac{S_A S_\nu}{S_A |P|^2 + S_\nu} = \frac{\sigma_A^2 \sigma_\nu^2}{\sigma_A^2 |P(\omega)|^2 + \sigma_\nu^2}$$

Minimización de la distorsión total

En términos de la transformada Z,

$$W(z) = \frac{P^*(1/z^*)}{P(z)P^*(1/z^*) + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_A^2}} \quad (1)$$

La energía de la señal de distorsión total residual es por tanto

$$\epsilon_{MMSE} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_e(e^{j\omega}) d\omega = \frac{\sigma_v^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 |P(e^{j\omega})|^2 + \sigma_v^2} d\omega$$

Este esquema se denomina *linear equalizer - minimum minimum-square error* (**LE-MMSE**).

Ejemplo

Canal $P(z) = 1 - \alpha z^{-1}$. Esquema LE-DFE

$$W_{LE-ZF} = \frac{1}{P(z)} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

$$\epsilon_{LE-ZF} = \frac{\sigma_v^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|P(e^{j\omega})|^2} d\omega = \frac{\sigma_v^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|1 - \alpha e^{-j\omega}|^2} d\omega$$

Ejemplo

Canal $P(z) = 1 - \alpha z^{-1}$. Esquema LE-MMSE (notamos $\rho = \sigma_\nu^2 / \sigma_A^2$)

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{P^*(1/z^*)}{P(z)P^*(1/z^*) + \rho} = \frac{1 - \alpha^* z}{(1 - \alpha z^{-1})(1 - \alpha^* z) + \rho} \\ &= -\frac{1 - \alpha^* z}{\alpha^* z - (1 + |\alpha|^2 + \rho) + \alpha z^{-1}} \end{aligned}$$

$$\epsilon_{MMSE} = \frac{\sigma_\nu^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 |P(e^{j\omega})|^2 + \sigma_\nu^2} d\omega = \frac{\sigma_\nu^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 |1 - \alpha e^{-j\omega}|^2 + \sigma_\nu^2} d\omega$$

Implementación con filtros estables

Vamos a ver cómo implementar los filtros anteriores mediante sistemas estables.

Inciso: filtros causales

- Los filtros que representan sistemas físicos son **causales**: $h[n] = 0$ para $n < 0$.
- Consideraremos también físicamente posibles filtros en los que $h[n] = 0$ para $n_0 \leq n$, $n_0 < 0$.
 - ▶ Interpretamos que representan sistemas físicos, pero **se ha desplazado la escala de tiempo**.
 - ▶ El sistema físico en realidad presenta un retardo que hace el sistema causal.

Transformadas Z inversas

- Recordamos que una función de transferencia $H(z)$ puede corresponder a distintas respuestas al impulso $h[n]$, una por cada posible región de convergencia de la transformada Z (secciones circulares sin polos en el interior, limitadas por polos).
- Nosotros consideraremos siempre la respuesta $h[n]$ estable, que es la correspondiente a la región de convergencia que contiene la circunferencia unidad.
- Por tanto para calcular transformadas inversas de funciones racionales nos basaremos en los desarrollos en serie

$$|\alpha| < 1 : \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = 1 + \alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \dots$$

$$|\alpha| > 1 : \frac{1}{1 - \alpha^{-1} z} = 1 + \alpha^{-1} z + \alpha^{-2} z^2 + \dots$$

Dado que trabajaremos siempre con funciones racionales sin polos múltiples, estas son las únicas transformadas Z inversas que necesitamos.

Filtros estables

Recordamos que un filtro es **estable**

- si a una entrada acotada responde con una salida acotada, y esto equivale a $\sum_n |h[n]| < \infty$.
- Si el filtro es **causal**, esto equivale a que tenga los **polos dentro del círculo unidad**.
- Si el filtro es **anticausal**, equivale a que tenga los **polos fuera del círculo unidad**.

Filtros de fase mínima

Un **filtro de fase mínima**

- es el que tiene los **ceros y polos dentro del círculo unidad**.
- Para un sistema **causal** esto es equivalente a que el **filtro y su inverso** sean **estables**.

Un **filtro de fase máxima**

- es el que tiene los **ceros y polos fuera del círculo unidad**
- Para un sistema **anticausal** esto es equivalente a que **el filtro y su inverso** sean **estables**.

Si $H(z)$ es de **fase mínima**, $H^*(1/z^*)$ es de **fase máxima**, y viceversa.

Propiedades de los filtros de fase mínima

Si $H_{min}(z)$ es de fase mínima y $H(\omega) = |H_{min}(\omega)|$, ambos causales,

- $H(z) = H_{min}(z)P(z)$ donde $P(z)$ es un filtro paso todo, con respuesta de amplitud unidad y es producto de términos de la forma $\frac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}}$
- $H_{min}(z)$ tiene la menor fase cambiada de signo:
$$-\angle H_{min}(z) \leq -\angle H(z)$$
- $H_{min}(z)$ presenta el menor retardo de grupo: $\frac{d \arg[H_{min}(\omega)]}{d\omega} \leq \frac{d \arg[H(\omega)]}{d\omega}$
- $H_{min}(z)$ tiene la energía más agrupada en torno a cero:
$$\sum_{k=0}^m |h[k]|^2 \leq \sum_{k=0}^m |h_{min}[k]|^2 \text{ (mínimo retardo de la energía)}$$

Funciones mónicas

- Una **serie de potencias** es **mónica** si es de la forma

$$1 + a_1z + a_2z^2 + \dots$$

o de la forma

$$1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots$$

- Una **señal discreta** $x[n]$ es **mónica** si lo es su serie de potencias asociada

$$\sum_n x[n]z^{-n}$$

Funciones mónicas: propiedades

- La **convolución** de secuencias causales (resp. anticausales) mónicas es otra secuencia causal (resp. anticausal) mónica:

$$\begin{aligned}(1 + a_1z + a_2z^2 + \dots)(1 + b_1z + b_2z^2 + \dots) \\ = 1 + (a_1 + b_1)z + (a_1b_1 + a_2 + b_2)z^2 \dots\end{aligned}$$

- La **inversa** causal (resp. anticausal) de una secuencia causal (resp. anticausal) mónica es otra secuencia mónica:

$$\begin{aligned}(1 + a_1z + a_2z^2 + \dots)(p_0 + p_1z + p_2z^2 + \dots) \\ = p_0 + (a_1 + p_1)z + \dots = 1 \\ \Rightarrow p_0 = 1, p_1 = -a_1, \dots\end{aligned}$$

- En otras palabras: las secuencias mónicas causales (resp. anticausales) forman **grupo** con la convolución.
- Como consecuencia de estas propiedades, una **función racional** $V(z)$ es la transformada Z de una secuencia **mónica** causal (resp. anticausal) si se puede poner como cociente de polinomios en z^{-1} (resp. en z) con término independiente igual a uno.

Filtros de fase mínima

- Todo filtro **sin ceros ni polos en la circunferencia unidad** se puede factorizar como el producto

$$W(z) = W_0 z^r W_{min}(z) W_{max}(z)$$

donde $W_{min}(z)$ es **causal de fase mínima** y $W_{max}(z)$ es **anticausal de fase máxima**, ambos **mónicos**:

$$W_{min}(z) = \frac{\prod_{k=1}^M (1 - d_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - c_k z^{-1})}, \quad W_{max}(z) = \frac{\prod_{k=1}^{M'} (1 - d'_k z)}{\prod_{k=1}^{N'} (1 - c'_k z)}, \quad |c_k|, |d_k|, |c'_k|, |d'_k| < 1$$

- Para comprobarlo basta agrupar en $W_{min}(z)$ los factores correspondientes a ceros y polos con módulo entre 0 y 1 y en $W_{max}(z)$ los demás.
- En la implementación se encadena el filtro de fase mínima con una versión truncada y retrasada del filtro de fase máxima.

Estabilidad y ruido

- En presencia de ruido no se deben utilizar filtros inestables, porque aumentan indefinidamente la varianza del ruido de entrada.
- Con ellos no se verifica el T. de filtrado de procesos, pues la salida no es estacionaria aunque lo sea la entrada.
- Por ejemplo, supongamos un proceso de muestras $x[n]$ independientes de varianza σ_X^2 a la entrada del filtro siguiente:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} X(z) \\ y[n] &= x[n] + \alpha y[n-1] \\ V[y[n]] &= V[x[n]] + |\alpha|^2 V[y[n-1]] \end{aligned}$$

luego **la varianza de la salida crece ilimitadamente.**

- Sin embargo, si $|\alpha| < 1$ la varianza de la salida converge a la solución de $\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 + |\alpha|^2 \sigma_Y^2$, es decir, a $\sigma_Y^2 = \frac{\sigma_X^2}{1-|\alpha|^2}$

Ejemplo

Canal $P(z) = 1 - \alpha z^{-1}$, $|\alpha| < 1$. Tenemos $P(z) = P_{min}(z)$, luego $P_{max}(z) = 1$, $P_0 = 1$, $r = 0$.

Filtro igualador LE-ZF:

$$W(z) = \frac{1}{P(z)} = \frac{1}{P_{min}(z)}$$

que es **causal estable**, luego se puede **implementar directamente**.

Ejemplo

Canal $P(z) = 1 - \alpha z^{-1}$, $|\alpha| > 1$. Tenemos

$$P(z) = -\alpha z^{-1}(1 - \alpha^{-1}z)$$

luego

$$P_{min}(z) = 1, P_{max}(z) = 1 - \alpha^{-1}z, P_0 = -\alpha, r = -1$$

El filtro igualador LE-ZF es

$$W(z) = \frac{1}{P(z)} = \frac{1}{P_{min}(z)}$$

que es **anticausal estable**, luego se debe **implementar mediante truncado y retardo**.

Ejemplo numérico

Canal

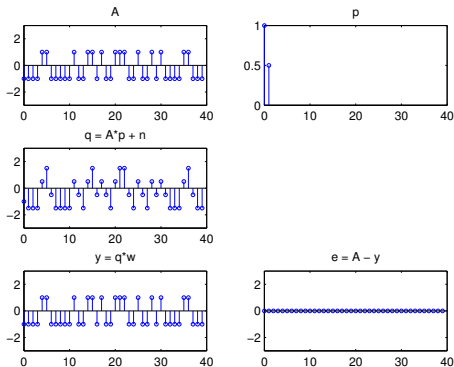
$$P(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} = P_{min}(z)$$

Filtro igualador DF

$$W(z) = \frac{1}{P(z)} = \frac{1}{P_{min}(z)}$$

Es causal y estable.

Ejemplo numérico



Ejemplo numérico

Canal

$$P(z) = 1 + 2z^{-1} = \underbrace{2}_{P_0} z^{-1} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2}z\right)}_{P_{\max}(z)}$$

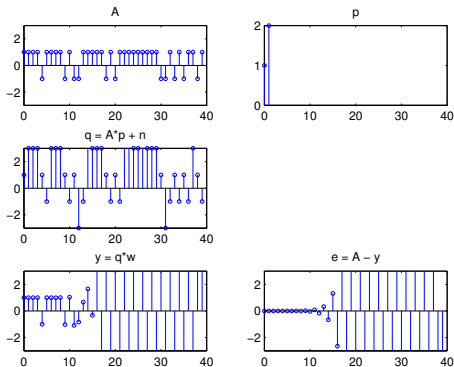
Filtro igualador DF

$$W(z) = \frac{1}{1+2z^{-1}} \quad \text{causal, inestable}$$
$$= 1 - 2z^{-1} + 2^2z^{-2} - \dots, |z| > 2$$

$$W(z) = \frac{1}{2z^{-1}} \frac{1}{1+\frac{1}{2}z} \quad \text{anticausal, estable}$$
$$\approx \frac{1}{2}z \left(1 - \frac{1}{2}z + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^M z^M\right), |z| < 2$$

Ejemplo numérico

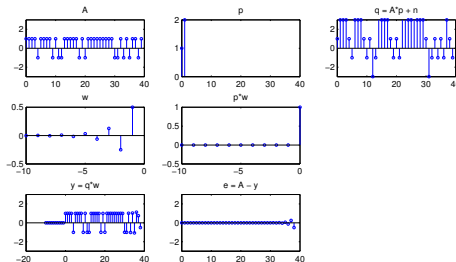
El filtro inverso (inestable) amplifica el ruido indefinidamente.



Ejemplo numérico

El filtro inverso aproximado (estable) restaura la señal aunque requiere un cierto retardo de implementación y deja IES residual.

El aumento del error al final de la secuencia se debe a que no se dispone del número de muestras siguientes necesario.



Uso de la IDFT

Tenemos que tener cuidado si utilizamos la IDFT para calcular la respuesta al impulso del filtro inverso.

Si hacemos

$$\begin{aligned}\hat{W}[k] &= W(e^{j2\pi k/N}), \quad k = 0, \dots, N-1 \\ \hat{w}[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} \hat{W}[k] e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, \dots, N-1\end{aligned}$$

lo que obtenemos es un periodo de la periodificación de N puntos de $w[n]$, es decir,

$$\hat{w}[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} w[n + lN], \quad n = 0, \dots, N-1$$

que puede ser muy distinta a $w[n]$ si ésta tiene longitud mayor que n .

Factorización del espectro de potencia

(Power spectrum factorization theorem)

- Consideramos el espectro de potencia de un PE complejo estacionario en sentido amplio $z[n]$

$$S_Z(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_Z[m], \quad R_Z[m] = E[x[n+m]x^*[n]]$$

Como $R_Z[m] = R_Z[-m]^*$, tenemos $S_Z(z) = S^*(1/z^*)$.

- Por tanto, si z_0 es un polo o un cero de $S_Z(z)$, también lo es $z'_0 = 1/z_0^* \Rightarrow$ Los ceros y polos vienen en pares (z_0, z'_0) tales que $z_0^* z'_0 = 1$.
- Como $|z_0 z'_0| = |z_0| |z'_0| = |z_0^*| |z'_0| = |z_0^* z'_0| = 1$, uno de estos valores estará dentro de la circunferencia unidad y el otro fuera.

Factorización del espectro de potencia

- Supongamos que $S(z)$ es racional y que no tiene ceros ni polos sobre la circunferencia unidad.
- Notando por d_k los polos y por c_k los ceros dentro de la circunferencia unidad, $S(z)$ tendrá que ser de la forma

$$S_Z(z) = \gamma_z^2 \underbrace{\frac{\prod_{k=1}^M (1 - d_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - c_k z^{-1})}}_{S_{min}(z)} \underbrace{\frac{\prod_{k=1}^M (1 - d_k^* z)}{\prod_{k=1}^N (1 - c_k^* z)}}_{S_{min}^*(1/z^*)}$$

donde, como vemos, $S_{min}(z)$ es un filtro de fase mínima.

Factorización del espectro de potencia

Atención a la transformación

$$F(z) \mapsto F^*(1/z^*)$$

Se cambian:

- Los coeficientes por sus conjugados
- La variable z por z^{-1}

Por ejemplo:

$$\frac{1 + \alpha z}{1 - \beta z^{-1}} \mapsto \frac{1 + \alpha^* z^{-1}}{1 - \beta^* z}$$

Factorización del espectro de potencia

En consecuencia:

- El proceso con densidad espectral de potencia $S_Z(z)$ se puede ver como el resultado de hacer pasar un proceso de ruido blanco discreto por un filtro de respuesta $S_{min}(z)$.
- El proceso se puede volver a convertir en ruido blanco haciéndolo pasar por el **filtro causal estable mónico de fase mínima** dado por $1/S_{min}(z)$ (**fltro blanqueador**).

El factor γ_Z^2 se puede calcular identificándolo en la descomposición o mediante la fórmula [Barry, p. 47]

$$\gamma_Z^2 = \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log S_Z(e^{j\omega}) d\omega \right]$$

Filtro blanqueador

De todos los filtros causales mónicos el filtro blanqueador es el que minimiza la varianza del proceso de salida:

En efecto, supongamos que

- $b[n]$ es el filtro blanqueador del proceso $Z[n]$
- $v[n]$ es el filtro causal mónico que minimiza la varianza de $Y[n] = Z[n] * v[n]$.

Por las propiedades de las señales mónicas, $W(z) = V(z)/B(z)$ también será mónico, luego

$$Y[n] = Z[n] * b[n] * w[n] = Z_B[n] * w[n]$$

donde $Z_B[n]$ es blanco con DEP γ_Z^2 .

Filtro blanqueador

Tenemos

$$\begin{aligned} E[|Y[n]^2|] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_Z^2 |W(\omega)^2| d\omega = \frac{1}{2\pi} \gamma_Z^2 \int_0^{2\pi} |W(\omega)^2| d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \gamma_Z^2 \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} |w_k e^{j\omega}|^2 d\omega = \gamma_Z^2 \sum_{k=0}^{\infty} |w_k|^2 \\ &= \gamma_Z^2 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} |w_k|^2 \right) \geq \gamma_Z^2 \end{aligned}$$

Por tanto la varianza se minimiza si los w_k valen cero, es decir, si $w[n] = \delta[n]$, luego

$$v[n] = b[n] * w[n] = b[n]$$

Filtros blanqueador y predictor

El **filtro predictor** es el filtro **estrictamente causal**

$$R(z) = r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2} + \dots$$

que minimiza $E \left[|X[n] - Y[n]|^2 \right]$, es decir, el filtro que mejor predice $X[n]$ a partir de $X[n-1]$, $X[n-2]$, \dots

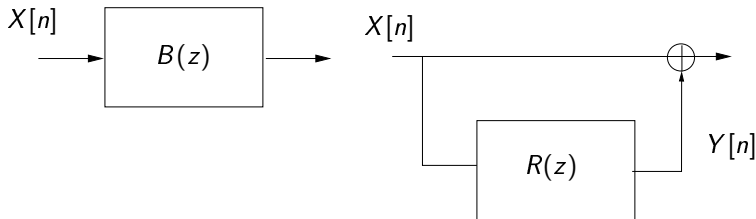
Filtros blanqueador y predictor

Si el **filtro blanqueador** de $X[n]$ es

$$B(z) = 1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots$$

los siguientes esquemas son equivalentes, puesto que el de la derecha equivale a un filtro causal mónico que minimiza la varianza de la salida, luego es el filtro blanqueador:

$$B(z) = 1 + R(z)$$

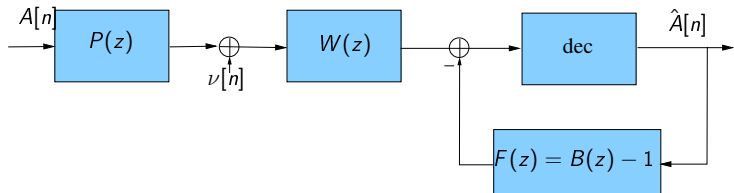


Sistemas con realimentación (DFE)

Estos sistemas (**decision-feedback equalizer (DFE)**) utilizan la señal detectada para reducir la IES.

El filtro $F(z) \equiv B(z) - 1$ que se aplica a la señal detectada debe ser **estrictamente causal** ($f[n] = 0$ para $n \leq 0$) para que el sistema sea físicamente realizable.

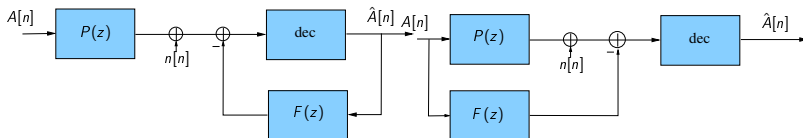
Esto equivale a que $B(z)$ sea **causal y mónico** ($b[n] = 0$ para $n \leq 0$, $b[1] = 1$).



Esquema con realimentación pura

En el esquema anterior puede parecer innecesario tener el filtro $W(z)$ además del bucle de realimentación. ¿Por qué no podemos tener un esquema con realimentación pura?

- Suponemos $p[n]$ causal (como es el sistema físico).
- Consideramos un esquema sin el filtro $W(z)$ y con filtro $f[n]$ en el bucle de realimentación, $f[n] = 0$ para $n \leq 0$ para que el sistema sea realizable.
- Si el decisor identifica correctamente los $A[n]$, es decir, $\hat{A}[n] = A[n]$, entonces a la entrada del decisor tenemos $A[n] * (p[n] - f[n])$.



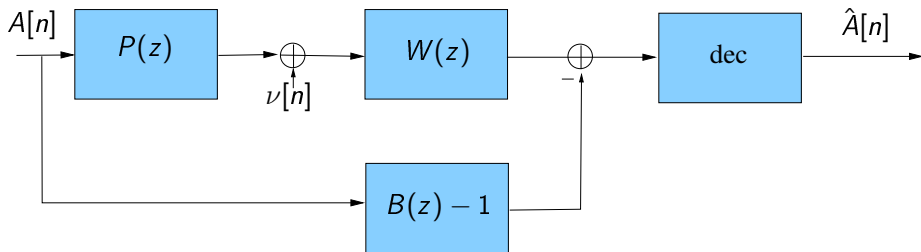
Esquema con realimentación pura

- Si tomamos $f[n] = p[n]$ para $n > 0$, tenemos $p[n] - f[n] = p[0]\delta[n]$ y hemos eliminado la IES.
- Inconveniente: $p[0]$ puede ser muy pequeño, con lo que podemos tener mucho error de decisión debido al ruido.
- Por eso
 - ▶ Se consideran esquemas con filtro $W(z)$.
 - ▶ Ahora podemos tener **IES precursora** (debida a los $p[n] \neq 0, n < 0$) además de la **IES postcursora** (debida a los $p[n] \neq 0, n > 0$).

Sistemas con realimentación (DFE)

Analizamos el sistema con filtros $W(z)$ y $B(z)$.

Si despreciamos los errores de transmisión, el sistema es equivalente al siguiente:

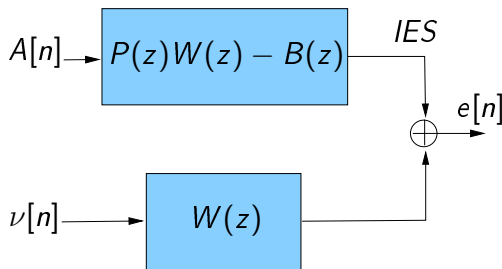


Sistemas con realimentación (DFE)

A la entrada del decisor tenemos

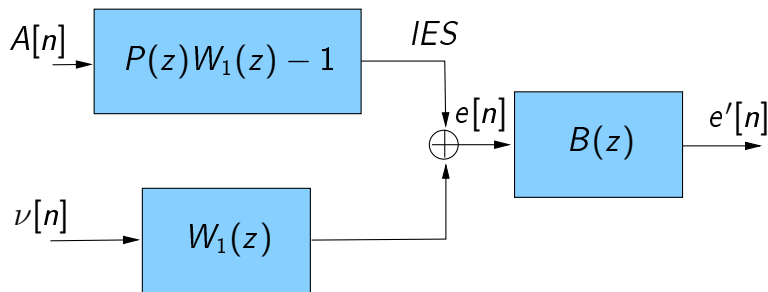
$$\begin{aligned} & A(z) [P(z)W(z) - [B(z) - 1]] + N(z)W(z) \\ = & A(z) + \underbrace{A(z) [P(z)W(z) - B(z)] + N(z)W(z)}_{e[n]} \end{aligned}$$

Representamos el diagrama equivalente de la generación de $e[n]$:



Sistemas con realimentación (DFE)

Definiendo $W_1(z) = W(z)/B(z)$ el esquema queda



- Para cancelar la IES (criterio ZF) tenemos que tomar, obviamente,

$$P(z)W_1(z) - 1 = 0 \Rightarrow W_1(z) = \frac{1}{P(z)}$$

igual que el $W(z)$ del caso LE-ZF)

- Ahora elegimos $B(z)$ para que $e'[n]$ tenga la menor varianza posible. Sabemos que la solución causal mónica óptima es el filtro blanqueador de $e[n]$.

Para obtenerlo factorizamos

$$P(z) = P_0 P_{min}(z) P_{max}(z)$$

(cambiando el origen de tiempo, en su caso, para suprimir el factor z^r) con lo que queda

$$\begin{aligned} S_e(z) &= S_n(z) W(z) W^*(1/z^*) = \sigma_v^2 \frac{B(z) B^*(1/z^*)}{P(z) P^*(1/z^*)} \\ &= \sigma_v^2 \frac{B(z) B^*(1/z^*)}{|P_0|^2 P_{min}(z) P_{min}^*(1/z^*) P_{max}(z) P_{max}^*(1/z^*)} \end{aligned}$$

DFE: Criterio ZF

Por tanto, el filtro blanqueador es

$$B(z) = P_{min}(z)P_{max}^*(1/z^*)$$

con lo que

$$\begin{aligned} W(z) &= B(z)W_1(z) = \frac{B(z)}{P(z)} = \frac{P_{min}(z)P_{max}^*(1/z^*)}{P_0 P_{min}(z)P_{max}(z)} \\ &= \frac{P_{max}^*(1/z^*)}{P_0 P_{max}(z)} \end{aligned}$$

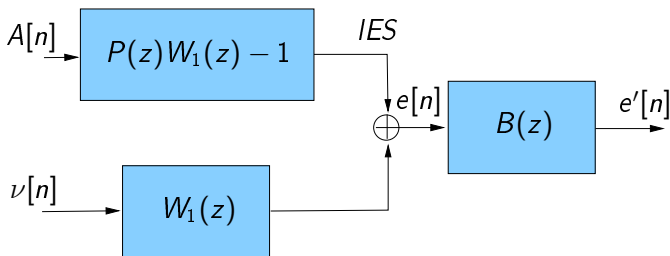
La densidad espectral de potencia del error queda

$$S_e(z) = R_\nu(z)W(z)W^*(1/z^*) = \frac{\sigma_\nu^2}{|P_0|^2} = \epsilon$$

DFE: Criterio MMSE

Ahora queremos minimizar la distorsión total (IES + ruido).
Primero hallamos el $W_1(z)$ que minimiza la energía de

$$\begin{aligned} e[n] &= A[n] * [p[n] * w_1[n] - \delta[n] + \nu[n] * w_1[n]] \\ &= [A[n] * p[n] + \nu[n]] * w_1[n] - A[n] \end{aligned}$$



El problema es equivalente a hallar el estimador lineal óptimo $w_1[n]$ de $A[n]$ a partir de $q[n] = A[n] * p[n] + \nu[n]$, que sabemos que está dado por

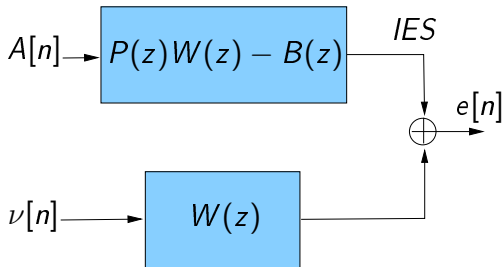
$$W_1(z) = \frac{\sigma_A^2 P^*(1/z^*)}{\sigma_A^2 P(z) P^*(1/z^*) + \sigma_\nu^2}$$

(igual que el $W(z)$ del caso LE-MMSE)

DFE: Criterio MMSE

Obtenemos el mismo resultado partiendo de este esquema, con $W(z) = W_1(z)B(z)$ y minimizando la energía de

$$\begin{aligned}e[n] &= A[n] * [p[n] * w_1[n] * b[n] - b[n] + \nu[n] * w_1[n] * b[n]] \\ &= [A[n] * b[n] * p[n] + \nu[n] * b[n]] * w_1[n] - A[n] * b[n]\end{aligned}$$



DFE: Criterio MMSE

El problema es equivalente a hallar el estimador lineal óptimo $w_1[n]$ de

$$\tilde{A}[n] = A[n] * b[n]$$

a partir de

$$A[n] * b[n] * p[n] + \underbrace{\nu[n] * b[n]}_{\tilde{\nu}[n]}$$

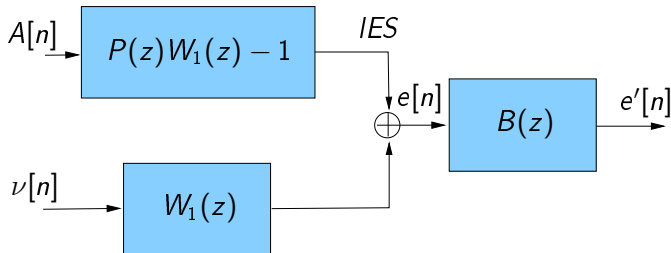
que está dado por

$$\begin{aligned} W_1(z) &= \frac{P^*(1/z^*)}{P(z)P^*(1/z^*) + \frac{S_{\tilde{\nu}}(z)}{S_{\tilde{A}}(z)}} \\ &= \frac{P^*(1/z^*)}{P(z)P^*(1/z^*) + \frac{\sigma_{\nu}^2 B(z)B^*(1/z^*)}{\sigma_A^2 B(z)B^*(1/z^*)}} \\ &= \frac{P^*(1/z^*)}{P(z)P^*(1/z^*) + \frac{\sigma_{\nu}^2}{\sigma_A^2}} \end{aligned}$$

DFE: Criterio MMSE

Una vez determinado $W_1(z)$, elegimos $B(z)$ para que $e'[n]$ tenga la menor varianza posible.

Sabemos que la solución causal mónica óptima es el filtro blanqueador de $e[n]$.



Por tanto tenemos que calcular primero la DEP de $e[n]$.

DFE: Criterio MMSE

La DEP de $e[n] = A[n] * (p[n] * w_1[n] - \delta[n]) + \nu[n] * w_1[n]$ es la suma de las DEPs de cada uno de los dos sumandos, puesto que son independientes. Tenemos

$$\begin{aligned}W_1(z) &= \frac{P^*(1/z^*)}{\sigma_A^2 P(z) P^*(1/z^*) + \sigma_\nu^2} \\P(z) W_1(z) - 1 &= \frac{\sigma_A^2 P(z) P^*(1/z^*)}{\sigma_A^2 P(z) P^*(1/z^*) + \sigma_\nu^2} - 1 = -\frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_A^2 P(z) P^*(1/z^*) + \sigma_\nu^2} \\S_e(z) &= \sigma_A^2 \frac{(\sigma_\nu^2)^2}{(\sigma_A^2 P(z) P^*(1/z^*) + \sigma_\nu^2)^2} + \sigma_\nu^2 \frac{P(z) P^*(1/z^*)}{(\sigma_A^2 P(z) P^*(1/z^*) + \sigma_\nu^2)^2} \\&= \frac{\sigma_A^2 \sigma_\nu^2}{\sigma_A^2 P(z) P^*(1/z^*) + \sigma_\nu^2}\end{aligned}$$

Ejercicio: Comprobar la última igualdad.

Factorizando el denominador

$$S_r(z) = \sigma_A^2 P(z) P^*(1/z^*) + \sigma_\nu^2 = \gamma_r^2 M_r(z) M_r^*(1/z^*)$$

donde $M_r(z)$ es de fase mínima y

$$\gamma_r^2 = \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sigma_A^2 |P(\omega)|^2 + \sigma_\nu^2) d\omega \right]$$

obtenemos el filtro blanqueador mónico de fase mínima

$$B(z) = M_r(z)$$

DFE: Criterio MMSE

Por tanto nos queda la DEP del error

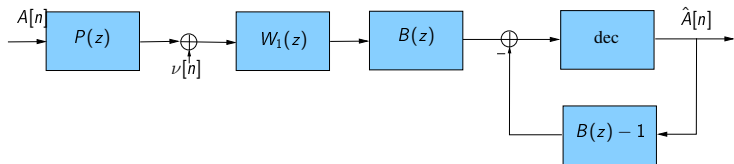
$$\begin{aligned} S_{e'}(z) &= S_e(z)B(z)B^*(1/z^*) \\ &= \frac{\sigma_A^2 \sigma_v^2 M_r(z) M_r^*(1/z^*)}{\gamma_r^2 M_r(z) M_r^*(1/z^*)} \\ &= \frac{\sigma_A^2 \sigma_v^2}{\gamma_r^2} = \epsilon \end{aligned}$$

y como filtro precursor

$$\begin{aligned} W(z) &= W_1(z)B(z) = \frac{\sigma_A^2 P^*(1/z^*)}{\sigma_A^2 P(z)P^*(1/z^*) + \sigma_v^2} B(z) \\ &= \frac{\sigma_A^2 P^*(1/z^*)}{\gamma_r^2 M_r(z) M_r^*(1/z^*)} M_r(z) \\ &= \frac{\sigma_A^2 P^*(1/z^*)}{\gamma_r^2 M_r^*(1/z^*)} \end{aligned}$$

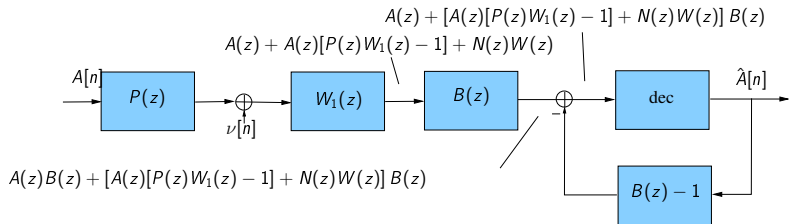
DFE: Conclusión

- Tanto para el criterio ZF como para el MMSE tenemos $W_1(z)$ igual al $W(z)$ correspondiente del esquema LE. Por tanto el resultado es equivalente a añadir al sistema LE el filtro $B(z)$ en serie y el filtro $B(z) - 1$ en el bucle de realimentación.
- Estos filtros adicionales preservan la parte de señal mientras que blanquean la distorsión, minimizando su energía.



DFE: Conclusión

Si sólo colocáramos $B(z)$ en serie, este filtro afectaría también a la señal. El filtro en bucle cancela el efecto de $B(z)$ sobre la señal, preservando su efecto sobre la distorsión.



DFE-ZF: Ejemplo

Canal $P(z) = 1 - \alpha z^{-1}$, $|\alpha| < 1$: $P(z) = P_{min}(z)$, luego $P_{max}(z) = 1$, $P_0 = 1$, $r = 0$.

Filtro en el bucle:

$$B(z) - 1 = P_{min}(z)P_{max}^*(1/z^*) - 1 = P_{min}(z) - 1 = P(z) - 1 = -\alpha z^{-1}$$

Filtro directo:

$$W(z) = \frac{P_{max}^*(1/z^*)}{P_0 P_{max}(z)} = 1$$

Error de decisión:

$$\epsilon = \frac{\sigma_v^2}{|P_0|^2} = \sigma_v^2$$

DFE-ZF: Ejemplo

Canal $P(z) = 1 - \alpha z$, $|\alpha| < 1$: $P(z) = P_{max}(z)$, luego $P_{max}(z) = 1$, $P_0 = 1$, $r = 0$.

Filtro en el bucle:

$$B(z) - 1 = P_{min}(z)P_{max}^*(1/z^*) - 1 = P_{max}^*(1/z^*) - 1 = \alpha^* z$$

Filtro precursor:

$$W(z) = \frac{P_{max}^*(1/z^*)}{P_0 P_{max}(z)} = \frac{1 - \alpha^* z^{-1}}{(-\alpha)(1 - \alpha z)}$$

Error de decisión:

$$\epsilon = \frac{\sigma_\nu^2}{|P_0|^2} = \sigma_\nu^2.$$

DFE-MMSE: Ejemplo

Canal $P(z) = 1 - \alpha z^{-1}$

Factorizamos, notando $\rho = \sigma_v^2 / \sigma_A^2$,

$$\sigma_A^2 P(z) P^*(1/z^*) + \sigma_v^2 = -\sigma_A^2 (\alpha^* z - \underbrace{(1 + |\alpha|^2 + \rho)}_{\equiv q} + \alpha z^{-1}) = \gamma_r^2 M_r(z) M_r^*(1/z^*)$$

Las raíces de $\alpha^* z - q + \alpha z^{-1} = z^{-1}(\alpha^* z^2 - qz + \alpha) = 0$ son

$$z_1 = \frac{q - \sqrt{q^2 - 4|\alpha|^2}}{2\alpha^*}, \quad z_2 = \frac{q + \sqrt{q^2 - 4|\alpha|^2}}{2\alpha^*}$$

El discriminante $q^2 - 4|\alpha|^2$ es positivo salvo para $|\alpha| = 1$, $\rho = 0$ (ejercicio), con lo que los numeradores son reales y $|z_1| < |z_2|$.

Comprobamos que se satisface la condición

$$z_1 z_2^* = \frac{q^2 - q^2 + 4|\alpha|^2}{4|\alpha|^2} = 1$$

luego $|z_1 z_2^*| = |z_1| |z_2| = 1$. Por tanto una está dentro y otra fuera de la circunferencia unidad, como debe ser.

DFE-MMSE: Ejemplo

Canal $P(z) = 1 - \alpha z^{-1}$ (cont.)

Tenemos por tanto

$$M_r(z) = 1 - z_1 z^{-1}$$

Para hallar γ_r^2 lo identificamos en la ecuación

$$\begin{aligned}\sigma_A^2 P(z) P^*(1/z^*) + \sigma_v^2 &= -\sigma_A^2 (\alpha^* z - q + \alpha z^{-1}) = \gamma_r^2 M_r(z) M_r^*(1/z^*) \\ &= \gamma_r^2 (1 - z_1 z^{-1})(1 - z_1^* z) \\ &= \gamma_r^2 (1 + |z_1|^2 - z_1 z^{-1} - z_1^* z)\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de z^{-1}

$$-\sigma_A^2 \alpha = -\gamma_r^2 z_1 \Rightarrow \gamma_r^2 = \frac{\sigma_A^2 \alpha}{z_1} = \sigma_A^2 \alpha z_2^* = \sigma_A^2 \frac{1}{2} \left(q + \sqrt{q^2 - 4|\alpha|^2} \right)$$

DFE-MMSE: Ejemplo

Canal $P(z) = 1 - \alpha z^{-1}$ (cont.)

Filtro precursor:

$$W(z) = \frac{\sigma_A^2 P^*(1/z^*)}{\gamma_r^2 M_r^*(1/z^*)} = \frac{\sigma_A^2}{\gamma_r^2} \frac{1 - \alpha^* z}{1 - z_1^* z}$$

Filtro en el bucle:

$$B(z) - 1 = M_r(z) - 1 = -z_1 z^{-1}$$

Error de decisión:

$$\epsilon = \frac{\sigma_A^2 \sigma_v^2}{\gamma_r^2} = 2 \frac{\sigma_v^2}{q + \sqrt{q^2 - 4|\alpha|^2}}$$

Ejercicios (DFE)

- 1 Hallar $B(z)$ y $W(z)$ para el esquema DFE-ZF si $P(z) = P_0 P_{min}(z)$.
- 2 Idem si $P(z) = P_0 P_{max}(z)$. Aplicar al caso $P(z) = 1 + 2z^{-1}$. Comparar con utilizar $W(z) = 1$, $B(z) = 2z^{-1}$.
- 3 Demostrar la fórmula de $S_e(z)$ del esquema DFE-MMSE.
- 4 Calcular la función de transferencia entre la entrada y la IES residual en los casos LE-MMSE y DFE-MMSE. Resultado:

$$P(z)W(z) - 1 = -\frac{\sigma_v^2}{\sigma_A^2 P(z)P^*(1/z^*) + \sigma_v^2} y$$

$$P(z)W(z) - B(z) = \frac{\sigma_v^2}{\gamma_r^2 M_r^*(1/z^*)}$$

- 5 Calcular $\epsilon_{DFE-ZF}(\alpha)$ para los modelos de canal $P(z) = 1 + \alpha z^{-1}$ y $P(z) = \alpha + z^{-1}$.

Cuadro resumen

Canal $P(z) = P_0 P_{\min}(z) P_{\max}(z)$

Algoritmo	Filtros	Potencia del error
LE-ZF	$W(z) = \frac{1}{P(z)}$	$\epsilon = \frac{\sigma_v^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{ P(e^{j\omega}) ^2} d\omega$
LE-MMSE	$W(z) = \frac{\sigma_A^2 P^*(1/z^*)}{\sigma_A^2 P(z) P^*(1/z^*) + \sigma_v^2}$	$\epsilon = \frac{\sigma_v^2 \sigma_A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sigma_A^2 P(e^{j\omega}) ^2 + \sigma_v^2} d\omega$
DFE-ZF	$B(z) = P_{\min}(z) P_{\max}^*(1/z^*)$ $W(z) = \frac{P_{\max}^*(1/z^*)}{P_0 P_{\max}(z)}$	$\epsilon = \frac{\sigma_v^2}{ P_0 ^2}$
DFE-MMSE	$\sigma_A^2 P(z) P^*(1/z^*) + \sigma_v^2$ $= \gamma_r^2 M_r(z) M_r^*(1/z^*)$ $B(z) = M_r(z)$ $W(z) = \frac{\sigma_A^2 P^*(1/z^*)}{\gamma_r^2 M_r^*(1/z^*)}$	$\epsilon = \frac{\sigma_A^2 \sigma_v^2}{\gamma_r^2}$

Igualador FIR MMSE

- Buscamos de nuevo un filtro que **minimice la distorsión total**

$$E \left[|e[n]|^2 \right], e[n] = \hat{A}[n] - A[n]$$

pero ahora que sea **FIR de N etapas**.

- La principal utilidad es que proporciona una **versión adaptativa**, es decir, que se calcula **a partir de la señal sin conocimiento a priori del sistema**.

Igualador FIR MMSE

- Recordamos que la señal recibida es

$$q[n] = A[n] * p[n] + \nu[n]$$

- La señal filtrada (estimación de $A[n]$) es

$$u[n] = q[n] * w[n] = \sum_{k=0}^{N-1} w[k]q[n-k]$$

- Definiendo los vectores $\mathbf{w} = [w[0], \dots, w[N-1]]^H$,
 $\mathbf{q}[n] = [q[n], q[n-1], \dots, q[n-N+1]]$ la podemos escribir como

$$u[n] = \mathbf{w}^H \mathbf{q}[n]$$

Igualador FIR MMSE

Queremos minimizar

$$\begin{aligned}\xi(\mathbf{w}) &= E \left\{ |e[n]|^2 \right\} = E \left\{ |A[n] - \mathbf{w}^H \mathbf{q}[n]|^2 \right\} \\&= E \left\{ (A[n] - \mathbf{w}^H \mathbf{q}[n])^H (A[n] - \mathbf{w}^H \mathbf{q}[n]) \right\} \\&= E \left\{ |A[n]|^2 \right\} + E \left\{ \mathbf{w}^H \mathbf{q}[n] \mathbf{q}^H[n] \mathbf{w} \right\} - E \left\{ \mathbf{w}^H \mathbf{q}[n] A^*[n] \right\} - E \left\{ A[n] \mathbf{q}^H[n] \mathbf{w} \right\} \\&= E \left\{ |A[n]|^2 \right\} + \mathbf{w}^H E \left\{ \mathbf{q}[n] \mathbf{q}^H[n] \right\} \mathbf{w} - \mathbf{w}^H E \left\{ \mathbf{q}[n] A^*[n] \right\} - E \left\{ A[n] \mathbf{q}^H[n] \right\} \mathbf{w}\end{aligned}$$

Igualador FIR MMSE

Definimos también

- $\mathbf{p} = E[\mathbf{q}[n]d^*[n]]$ (vector)
- $\mathbf{R} = E[\mathbf{q}[n]\mathbf{q}^H[n]]$ (matriz $N \times N$)

La matriz \mathbf{R} es **semidefinida positiva (SDP)**, es decir, $\mathbf{x}^H \mathbf{R} \mathbf{x} \geq 0$ para todo vector \mathbf{x} . En efecto,

$$\mathbf{x}^H \mathbf{R} \mathbf{x} = \mathbf{x}^H E[\mathbf{q}[n]\mathbf{q}^H[n]]\mathbf{x} = E[\mathbf{x}^H \mathbf{q}[n]\mathbf{q}^H[n]\mathbf{x}] = E\left[|\mathbf{x}^H \mathbf{q}[n]|^2\right] \geq 0$$

Suponemos en adelante que es **definida positiva** ($\mathbf{x}^H \mathbf{R} \mathbf{x} > 0$), con lo que además es invertible.

Igualador FIR MMSE

Y ya podemos completar el cálculo de \mathbf{w} :

$$\begin{aligned}\xi(\mathbf{w}) &= E \left\{ |e[n]|^2 \right\} = E \left\{ |A[n] - \mathbf{w}^H \mathbf{q}[n]|^2 \right\} \\&= E \left\{ (A[n] - \mathbf{w}^H \mathbf{q}[n])^H (A[n] - \mathbf{w}^H \mathbf{q}[n]) \right\} \\&= E \left\{ |A[n]|^2 \right\} + E \left\{ \mathbf{w}^H \mathbf{q}[n] \mathbf{q}^H[n] \mathbf{w} \right\} - E \left\{ \mathbf{w}^H \mathbf{q}[n] A^*[n] \right\} - E \left\{ A[n] \mathbf{q}^H[n] \mathbf{w} \right\} \\&= E \left\{ |A[n]|^2 \right\} + \mathbf{w}^H E \left\{ \mathbf{q}[n] \mathbf{q}^H[n] \right\} \mathbf{w} - \mathbf{w}^H E \left\{ \mathbf{q}[n] A^*[n] \right\} - E \left\{ A[n] \mathbf{q}^H[n] \right\} \mathbf{w} \\&= E \left\{ |A[n]|^2 \right\} + \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} - \mathbf{w}^H \mathbf{p} - \mathbf{p}^H \mathbf{w} \\&= E \left\{ |A[n]|^2 \right\} + \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} - 2\Re [\mathbf{p}^H \mathbf{w}]\end{aligned}$$

Igualador FIR MMSE

- En el caso **real**, podemos obtener la solución calculando el **gradiente**

$$\nabla \xi(\mathbf{w}) = 2\mathbf{R}\mathbf{w} - 2\mathbf{p}$$

e igualando a cero, con lo que obtenemos

$$\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}$$

Se trata efectivamente de un mínimo porque el hessiano de $\xi(\mathbf{w})$ es \mathbf{R} (definida positiva).

- En el caso **complejo** la expresión de la solución es **la misma**. Se puede comprobar a partir de la relación

$$\xi(\mathbf{w}) = \xi(\mathbf{w}_{opt}) + (\mathbf{w} - \mathbf{w}_{opt})^H \mathbf{R}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_{opt})$$

(ejercicio: comprobar).

Igualador FIR MMSE: Cálculo de **R** y **p**

Indexando las filas y columnas de **R** y **p** por $i, j = 0, 1, \dots, N - 1$, tenemos

$$R_{ij} = E [q[n - i]q^*[n - j]] = R_q[j - i]$$

donde recordamos que

$$\begin{aligned} q[n] &= A[n] * p[n] + \nu[n] \\ R_q[m] &= R_A[m] * p[m] * p^*[-m] + R_\nu[n] \\ &= \sigma_A^2 p[m] * p^*[-m] + \sigma_\nu^2 \delta[n] \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} p_i &= E [q[n - i]A^*[n]] = R_{qA}[-i] = R_{Aq}^*[i] \\ R_{qA}[m] &= E [((A * p)[n + m] + \nu[n + m]) A^*[n]] \\ &= E [(A * p)[n + m] A^*[n]] \\ &= R_A[m] * p[m] = \sigma_A^2 p[m] \end{aligned}$$

Ejemplo

$$P(z) = 1 - \alpha z^{-1}$$

$$P(z)P^*(1/z^*) = (1 - \alpha z^{-1})(1 - \alpha^* z) = -\alpha^* z + (1 + |\alpha|^2) - \alpha z^{-1}$$

$$\begin{aligned} R_q[m] &= \sigma_A^2 p[m] * p^*[-m] + \sigma_v^2 \delta[n] \\ &= \sigma_A^2 [-\alpha^* \delta[n+1] + (1 + |\alpha|^2) \delta[n] - \alpha \delta[n-1]] + \sigma_v^2 \delta[n] \\ &= -\sigma_A^2 \alpha^* \delta[n+1] + [\sigma_A^2 (1 + |\alpha|^2) + \sigma_v^2] \delta[n] - \sigma_A^2 \alpha \delta[n-1] \end{aligned}$$

Calculamos $\mathbf{R} = (R_{ij})$ por la relación

$$R_{ij} = R_q[j - i]$$

Ejemplo

$$\begin{aligned}P(z) &= 1 - \alpha z^{-1} \\R_{qA}[m] &= \sigma_A^2 p[m] \\&= \sigma_A^2 (1 - \alpha \delta[n - 1])\end{aligned}$$

Calculamos $\mathbf{p} = (p_i)$ por la relación

$$p_i = R_{qA}[-i]$$

Inciso: Gradiente de una función real de un vector real

Consideramos una función $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$.

Sabemos que su gradiente en \mathbf{x} es el vector $\nabla f(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^\top$.

También se puede definir por tener la propiedad de que la variación de f en cualquier dirección \mathbf{v} es el producto escalar de \mathbf{v} con el gradiente:

$$\left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0} = \mathbf{v}^\top \nabla f(\mathbf{x})$$

Inciso: Gradiente de una función real de un vector complejo

Consideramos una función $f : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Podemos ver $f(\mathbf{w})$, $\mathbf{w} = \mathbf{x} + j\mathbf{y}$ como una función de variables reales: $\tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{w})$.

El gradiente de ésta será $\nabla \tilde{f}(\mathbf{w}) = \left[\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}}_{\nabla_r f(\mathbf{w})}, \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}}_{\nabla_i f(\mathbf{w})} \right]^\top$ y tendremos por

tanto

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{w} + t\mathbf{z}) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \tilde{f}((\mathbf{x}, \mathbf{y}) + t(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \right|_{t=0} \\ &= [u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n]^\top \nabla \tilde{f}(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

Pero esta expresión se puede poner como

$$\Re \left[\mathbf{z}^\top (\nabla_r f(\mathbf{w}) + j \nabla_i f(\mathbf{w})) \right]$$

Podemos por tanto calcular el gradiente $\nabla f(\mathbf{w})$ de una función real de un vector complejo mediante la relación

$$\left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{w} + t\mathbf{z}) \right|_{t=0} = \Re \left[\mathbf{z}^\top \nabla f(\mathbf{w}) \right]$$

Igualador FIR MMSE: solución iterativa

De acuerdo con la discusión anterior, el gradiente de $\xi(\mathbf{w})$ se obtiene de la relación

$$\begin{aligned}\left. \frac{d}{dt} \xi(\mathbf{w} + tz) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \left[(\mathbf{w} + tz)^H \mathbf{R}(\mathbf{w} + tz) - 2\Re \left[\mathbf{p}^H(\mathbf{w} + tz) \right] \right] \right|_{t=0} \\ &= \Re \left[\mathbf{z}^T \nabla f(\mathbf{w}) \right] \\ \Rightarrow \nabla \xi(\mathbf{w}) &= \mathbf{R}\mathbf{w} - \mathbf{p} = \mathbf{R}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_{opt})\end{aligned}$$

Igualador FIR MMSE: solución iterativa

Para alcanzar la solución óptima sin tener que invertir \mathbf{R} hallamos la dirección de más rápido descenso de $\xi(\mathbf{w})$. Esta dirección es la opuesta al gradiente

$$\nabla \xi(\mathbf{w}) = \mathbf{R}\mathbf{w} - \mathbf{p} = \mathbf{R}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_{opt})$$

El algoritmo resultante consiste en la actualización sucesiva de \mathbf{w} :

$$\mathbf{w}[n+1] = \mathbf{w}[n] - \mu \nabla \xi(\mathbf{w}[n]) = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}) \mathbf{w}[n] + \mu \mathbf{p}$$

Igualador FIR MMSE: solución iterativa

Definiendo el error de aproximación

$$\mathbf{v}[n] = \mathbf{w}[n] - \mathbf{w}_{opt}$$

tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{w}[n+1] - \mathbf{w}_{opt} &= \mathbf{w}[n] - \mathbf{w}_{opt} - \mu \nabla \xi(\mathbf{w}) \\ \mathbf{v}[n+1] &= \mathbf{v}[n] - \mu \nabla \xi(\mathbf{w}) = \mathbf{v}[n] - \mu \mathbf{R} \mathbf{v}[n] = (\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}) \mathbf{v}[n]\end{aligned}$$

luego $\mathbf{v}[n] \rightarrow \mathbf{0}$ si todos los autovalores de $\mathbf{I} - \mu \mathbf{R}$ son menores que uno en valor absoluto, lo que ocurre si $0 < \mu < 2/\lambda_{max}(\mathbf{R})$.

Igualador FIR MMSE: solución adaptativa

Para obtener la solución adaptativa sustituimos \mathbf{R} y \mathbf{p} por sus estimaciones a partir de la muestra actual:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= E \{ \mathbf{q}[n] \mathbf{q}^H[n] \} \approx \mathbf{q}[n] \mathbf{q}^H[n] \\ \mathbf{p} &= E \{ \mathbf{q}[n] d^*[n] \} \approx \mathbf{q}[n] d^*[n]\end{aligned}$$

con lo que la iteración queda

$$\begin{aligned}\mathbf{w}[n+1] &= (I - \mu \mathbf{q}[n] \mathbf{q}^H[n]) \mathbf{w}[n] + \mu \mathbf{q}[n] d^*[n] \\ &= \mathbf{w}[n] - \mu \mathbf{q}[n] (\mathbf{q}^H[n] \mathbf{w}[n] - d^*[n])\end{aligned}$$